Analisi 2. Secondo Compitino. 20.03.2021

*Campo obbligatorio

1. Indirizzo email *

2. Cognome *

Istruzioni di compilazione: Si usi:

- lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
- il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
- il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
- `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
- `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
- `Pi` per π;
- le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
- le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
- per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Domanda 1

Si stabilisca se le funzioni definite nel seguito ammettono integrale (secondo Lebesgue) sui rispettivi insiemi

6. 2 punti

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x} \text{ sull'intervallo } [0, +\infty].$$

Contrassegna solo un ovale.

- ammette integrale
- non ammette integrale

7. 2 punti

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x^2} \text{ sull'intervallo } [1, +\infty].$$

Contrassegna solo un ovale.

- ammette integrale
- non ammette integrale

8. 2 punti

$$f(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \text{ sull'insieme } B := \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+y^2 \geq 1\}.$$

Contrassegna solo un ovale.

- ammette integrale
- non ammette integrale

9. 2 punti

$$f(x,y,z) := \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2} \text{ sull'insieme } D := \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+y^2 \leq 1\}.$$

Contrassegna solo un ovale.

- ammette integrale
- non ammette integrale

Domanda 2

Si considerino l'insieme V definito da:

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xyz = e^{x-1}, x+1 = y+z\}$$

e il punto $P_0 = (1,1,1)$. Si vede facilmente che $P_0 \in V$.

10. 4 punti

Si individuino quali tra le affermazioni seguenti si deducono dal teorema del Dini (anche più di una o eventualmente nessuna)

(a) Vicino al punto P_0 l'insieme V si descrive come sostegno di una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), t)$, definita per t in un intorno di $t_0 = 1$.

(b) Vicino al punto P_0 l'insieme V si descrive come sostegno di una curva $\gamma(t) = (x(t), t, z(t))$, definita per t in un intorno di $t_0 = 1$.

(c) Vicino al punto P_0 l'insieme V si descrive come sostegno di una curva $\gamma(t) = (t, y(t), z(t))$, definita per t in un intorno di $t_0 = 1$.

Seleziona tutte le voci applicabili.

- [ ] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)

11. 4 punti

Se γ è definita come nella domanda precedente si calcoli $\gamma'(1)$ (si può dare per buono che le definizioni date da (a), (b) e (c) danno lo stesso risultato e quindi se ne può usare una qualunque).

Domanda 3

Si considerino $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $V \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$f(x, y) := 3x - 4y$$
$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

12. 1 punto

Si dica se è vera l'affermazione: "f non ha punti stazionari interni a V".

Contrassegna solo un ovale.

- SI'
- No

13. 2 punti

Si dica se è vera l'affermazione: "f non ha punti stazionari vincolati su V del tipo $(x, 0)$ con $|x| < 1$".

Contrassegna solo un ovale.

- SI'
- No

14. 2 punti

Si dia una breve motivazione per la risposta alla domanda precedente.

15. 5 punti

Si trovino tutti i punti stazionari vincolati per f su V (rispondendo eventualmente "non ne esistono".

16. 2 punti

Si calcoli $\max_{(x,y)\in V} f(x, y)$ (o si scriva "non esiste")

17. 2 punti

Si calcoli $\min_{(x,y)\in V} f(x, y)$ (o si scriva "non esiste")

Domanda 4

Si considerino $f : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty]$ e l'insieme $D \subset \mathbb{R}^3$ deifiniti da:

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2 > 0 \\ +\infty & \text{se } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

$$D := \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1, z^2 \leq x^2+y^2\}$$

18. 2 punti

Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta:

(a) f è misurabile in quanto continua $\left(\lim_{P \to P_0} f(f) = f(P_0) \text{ per ogni } P_0 \in \mathbb{R}^3\right)$.

(b) f è misurabile in quanto continua tranne che in un punto (i punti hanno misura nulla in $\mathbb{R}^3$).

(c) f è misurabile in quanto continua tranne che in una retta (le rette hanno misura nulla in $\mathbb{R}^3$).

(d) f è misurabile in quanto continua tranne che in un piano (i piani hanno misura nulla in $\mathbb{R}^3$).

(e) Nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)

19. Criterio (b) 6 punti

Si calcoli $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ (o si scriva "non esiste").

20. 2 punti

Si descriva brevemente il procedimento utilizzato per svolgere il punto precedente (indicare i teoremi/le formule utilizzati senza riportare i calcoli).